

Programmierübung Nr. 9
zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Diese Aufgabe behandelt eine wichtige Klasse von Randwertaufgaben, die sogenannten Sturm-Liouville Probleme. Ihre allgemeine Form lautet

$$-\frac{d}{dt} \left(\nu(t) \frac{d}{dt} u(t) \right) + \beta(t) \frac{d}{dt} u(t) + r(t) u(t) = f(t), \quad t \in I = [a, b]$$

mit

$$\mu_1 u'(a) + \mu_0 u(a) = g_a, \quad \kappa_1 u'(b) + \kappa_0 u(b) = g_b.$$

Weiter ist $\nu(t) \in C^1(I)$, $\beta(t)$, $r(t) \in C(I)$ und die Koeffizienten μ_i, κ_i sowie g_a, g_b aus \mathbb{R} .

Für diese Problemklasse wollen wir uns auf zwei Fälle konzentrieren:

- (a) Wir setzen $\nu(t) \equiv 1$, $f(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 0$ und $r(t) \equiv -\lambda$. Weiter sei $I = [0, 1]$. Für den linken Rand haben wir $\mu_1 = 0$, $\mu_0 = 1$ und $g_a = 1$ und für den rechten Rand $\kappa_1 = 0$, $\kappa_0 = 1$ und $g_b = -1$.

Für λ betrachten wir die Fälle

- (i) $\lambda = \pi^2$
- (ii) $\lambda = 9\pi^2$
- (iii) $\lambda = 25\pi^2$

- (b) Wir setzen $\nu(t) \equiv \varepsilon$, $f(t) \equiv 0$, $\beta(t) \equiv 1$ und $r(t) \equiv 0$. Weiter sei $I = [0, 1]$. Für den linken Rand haben wir $\mu_1 = 0$, $\mu_0 = 1$ und $g_a = 1$ und für den rechten Rand $\kappa_1 = 0$, $\kappa_0 = 1$ und $g_b = 0$.

Für ε betrachten wir die Fälle

- (i) $\varepsilon = 1$
- (ii) $\varepsilon = 0.01$
- (iii) $\varepsilon = 0.0001$

Wählen Sie eine der folgenden zwei Methoden aus:

- I) Implementieren Sie ein Einzelschießverfahren und wenden Sie es auf alle sechs Kombinationen an (a) i)-iii) und b) i)-iii)).
- II) Implementieren Sie ein Differenzenverfahren, wobei die zweite Ableitung durch einen Differenzenquotienten zweiter Ordnung approximiert wird, während die erste Ableitung optional einmal mit dem zentralen Differenzenquotienten als auch mit dem Rückwärtsdifferenzenquotienten approximiert werden kann. Wenden Sie das so implementierte Differenzenverfahren auf alle sechs Kombination an (a) i)-iii) und b) i)-iii)).

Aufgaben:

- 1) Untersuchen Sie den maximalen Fehler im Intervall I

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u_k - u(t_k)\|,$$

wobei $u(t_k)$ entweder den Wert der analytischen Lösung oder einer Referenzlösung an der Stelle t_k bezeichnet.

Dabei benutzen Sie die Gitterweite $h = 2^{-i}$ mit $i = 2, \dots, 8$.

- 2) Dokumentieren Sie Ihre Beobachtung in Form von logarithmischen Fehlerplots als auch in Form von Fehlertabellen.