

Übung Nr. 7 zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 7.1:

- (a) Besitzt die d-dimensionale lineare AWA

$$u'(t) + Au(t) = b(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ und einer stetigen vektorwertigen Funktion $b : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine eindeutige globale Lösung?
Unter welcher Bedingung ist diese Lösung beschränkt?

- (b) Was ist der wesentliche Unterschied in den Aussagen der Existenzsätze von Peano und Picard-Lindelöf?
(c) Unter welcher Bedingung existiert eine lokale Lösung einer Anfangswertaufgabe?
(d) Unter welcher zusätzlichen Bedingung ist diese lokale Lösung eindeutig?
(e) Sind Lösungen von linearen AWAn mit stetigen Koeffizienten eindeutig?
(f) Wie lautet die Lösung von $u'(t) = \lambda(t), t \geq 0$ und $u(0) = 1$?

Aufgabe 7.2:

- (a) Was besagt die Grönwallsche Ungleichung? Wozu dient sie?
(b) Wann konvergiert eine lineare Einschrittmethode für AWAn?
(c) Was ist der Abschneidefehler einer Einschrittformel $y_n = y_{n-1} + hF(h; t_n, y_n, y_{n-1})$?
(d) Was ist die Konsistenzordnung und die Konvergenzordnung einer Einschrittformel?
(e) Was ist bei Einschrittmethoden der Zusammenhang zwischen Konsistenz und Konvergenz?
(f) Beschreiben Sie in wenigen Worten das Konstruktionsprinzip von Runge-Kutta-Verfahren.
(g) Was ist die Struktur von expliziten Runge-Kutta-Verfahren (RKV)?
(h) Gibt es explizite RKV vierter Ordnung mit drei Stufen?
(i) Wie bestimmen Sie die Konsistenzordnung von RKV?
(j) Wie sieht die (implizite) Trapezformel aus, und welche Konvergenzordnungen hat sie?
(k) Wie lautet die Verfahrensvorschrift des θ -Verfahrens?
(l) Wozu dienen eingebettete RKV?
(m) Wie werden eingebettete RKV konstruiert?
(n) Was ist der Aufwand bei eingebetteten RKV im Vergleich zu einem gewöhnlichen RKV?
(o) Welche Methoden zur a posteriori Schätzung des Abschneidefehlers kennen Sie?
(p) Für welche Methoden stehen die Akronyme DIRK und SDIRK. Was sind ihre charakteristischen Eigenschaften? Wie sehen ihre Butcher-Tableaus aus?
(q) Was sind Kollokationsverfahren?
(r) Was ist ein Gauß-Kollokationsverfahren?
(s) Was ist die maximale Ordnung eines r -stufigen RKV?
(t) Was sind stetige RKV? Wozu dienen sie?

Aufgabe 7.3:

- (a) Was ist das Stabilitätsgebiet, bzw. Stabilitätsintervall einer Einschrittformel?
- (b) Welches Stabilitätsgebiet haben das implizite, das explizite Eulerverfahren, sowie die implizite Trapezregel?
- (c) Warum sind weder das implizite Eulerverfahren, noch das explizite Eulerverfahren energieerhaltend?
- (d) Warum untersucht man Stabilitätsgebiete?
- (e) Wann nennt man die Aufgabenstellung einer AWA $u'(t) = f(t, u(t)), t \geq 0$ steif?
- (f) Gegeben eine lineare AWA mit Eigenwerten $\lambda = -50 \pm 80i$ und $\lambda = \pm 2i$ und $u(0) = u_0$. Ist dieses Problem steif?
- (g) Wann nennt man ein Verfahren A-stabil?
- (h) Wann nennt man ein Verfahren L-stabil (oder stark A-stabil)?
- (i) Kann ein L-stabiles Verfahren die Energie einer Schwingung erhalten?
- (j) Benötigen Sie bei der AWA in Teil (f) ein A-stabiles Verfahren, um $u(0.001)$ zu berechnen? Wie sieht es mit $u(10)$ aus?
- (k) Definieren Sie die Stabilitätsfunktion einer RKV.
- (l) Gibt es A-stabile, explizite RKV? Wie sieht die Stabilitätsfunktion expliziter RKV aus?
- (m) Geben Sie die Stabilitätsfunktion für das θ -Verfahren an. Skizzieren Sie für $\theta = 0$, $\theta = 0.5$ und $\theta = 1$ die Stabilitätsgebiete.
- (n) Wie ist für die Verfahrensfunktion der AWA $u'(t) = f(t, u(t))$ die einseitige Lipschitz-Bedingung definiert?
- (o) Was ist B-Stabilität? Mit welcher Eigenschaft der Differentialgleichung bzw. ihrer Lösung hängt sie zusammen?
- (p) Wie hängen A- und B-Stabilität zusammen?
- (q) Welche Stabilitätseigenschaft haben Gauß-Kollokationsverfahren?

Aufgabe 7.4:

- (a) Welche beiden Konstruktionswege für lineare Mehrschrittmethoden (LMM) kennen Sie?
- (b) Wann heißt eine LMM null-stabil?
- (c) Wann kann man bei LMM aus Konsistenz die Konvergenz folgern?
- (d) Was sind die charakteristischen Polynome einer LMM?