

Übung Nr. 9 zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 9.1: (Stabilitätsbegriffe) Rekapitulieren Sie die in der Vorlesung eingeführten Stabilitätsbegriffe

- (a) Diskrete Stabilität,
- (b) Numerische Stabilität,
- (c) Null-Stabilität,
- (d) A-Stabilität,
- (e) A(0)-Stabilität,

indem Sie kurz die Bedeutung der Begriffe beschreiben und dann den Zusammenhang darstellen, in dem Sie verwendet werden.

Aufgabe 9.2: (BDF-Formeln)

- (a) Leiten Sie nach dem Konstruktionsprinzip der BDF-Verfahren eine Formel her, die die Lösung am Punkt $t_2 = \frac{3h}{2}$ aus den Werten an den Punkten $t_0 = 0$ und $t_1 = h$ berechnet, also eine Formel der Form

$$y_n + \alpha_1 y_{n-1} + \alpha_2 y_{n-2} = h\beta_2 f_n.$$

- (b) Welche Konsistenzordnung hat Ihr Verfahren?

Aufgabe 9.3: (DAE erster Ordnung/Singulär gestörtes Problem) Wir betrachten das Problem

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix},$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$, wobei $D \neq 0$. Weiter bezeichnet I eine Einheitsmatrix von jeweils entsprechender Größe und $f \in \mathbb{R}^n$ und $g \in \mathbb{R}^m$.

- (a) Es sei $\varepsilon = 0$. Geben Sie den (differentiellen) Index für

- (i) $D \neq 0$
- (ii) $D = 0$

an! An welche der Matrizen müssen Sie zusätzliche Regularitätsforderungen stellen?

- (b) Wenden Sie die Trapezmethode auf die obige AWA an!
- (c) Unter welcher Bedingung ist ein beliebiger Schritt der Trapezmethode lösbar? Was ändert sich wenn $\varepsilon = 0$ (DAE) ist?
- (d) Unter welchen Bedingungen ist das lineare System in jedem Schritt der Trapezmethode lösbar, wenn neben $\varepsilon = 0$ auch $D = 0$ ist?