

Übung Nr. 13 zur Vorlesung Numerik I, Sommer 2013

Aufgabe 13.1: LMM

- (a) Was ist das Stabilitätspolynom einer LMM?
- (b) Unter welcher Bedingung konvergiert eine lineare Mehrschrittmethode (LMM)?
- (c) Welche Ordnung haben die Mittelpunktsregel und die Trapezregel?
- (d) Aus welchem Grund sind die Mittelpunkts- und die Simpson-Methode als eigenständiges Lösungsverfahren unbrauchbar?
- (e) Was bedeutet für eine Differenzenformel der Begriff „ $A(\alpha)$ -stabil“? Warum wurde er eingeführt?
- (f) Wie erzeugen Sie fehlende Startwerte beim BDF-Verfahren der Ordnung 5?

Aufgabe 13.2: DAE

- (a) Geben Sie ein Beispiel, wie aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung eine DAE wird.
- (b) Wie bestätigt man, dass eine vorgelegte DAE den (differentiellen) Index 1 besitzt?
- (c) Warum betrachtet man numerische Verfahren speziell für DAE?

Aufgabe 13.3: RWA

- (a) Was unterscheidet eine Randwertaufgabe (RWA) von einer Anfangswertaufgabe (AWA)?
- (b) Wie unterscheiden sich die Stabilitätseigenschaften von RWA und AWA?
- (c) Wie ist die *Fundamentalmatrix* definiert?
- (d) Wie berechnet man die Ableitung der Lösung am Intervallende nach den Startwerten?
- (e) Definieren Sie die Einzelschießmethode für die allgemeine Randwertaufgabe

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (a, b), \quad r(u(a), u(b)) = 0.$$

- (f) Beschreiben Sie in 3-4 aufeinanderfolgenden Stichpunkten das algorithmische Vorgehen für die Durchführung der Einzelschießmethode für einer lineare RWA.
- (g) Was ist der Vorteil der Mehrfachschießmethode gegenüber der Einzelschießmethode?

Aufgabe 13.4: Differenzenverfahren

- (a) Beschreiben Sie Vorgehensweise bei einem Differenzenverfahren anhand einer linearen RWA?
- (b) Wann konvergiert ein Differenzenschema für eine lineare RWA?
- (c) Wie sind der zentrale und der Rückwärts-Differenzenquotient für die Approximation der ersten Ableitung $u'(t)$ definiert? Von welcher Ordnung ist der Fehler in Bezug auf die Schrittweite h für diese beiden Methoden?
- (d) Diskretisieren Sie die Differentialgleichung

$$-u''(t) = 0$$

mit Hilfe des Differenzenquotienten für Ableitungen 2ter Ordnung. Geben Sie eine Schranke für den größten Eigenwert der auftretenden Systemmatrix an.

- (e) Wie ist der Abschneidefehler τ_n in einem Zeitpunkt t_n definiert?
- (f) Welche drei Eigenschaften charakterisieren eine irreduzibel diagonal-dominante Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$?
- (g) Was ist eine M -Matrix?
- (h) Warum wird der Rückwärtsdifferenzenquotient eingesetzt?

Aufgabe 13.5: Galerkin-Verfahren

- (a) Was ist die schwache Formulierung einer Differentialgleichung?
- (b) Warum muss man Funktionenräume einführen?
- (c) Was ist die Bilinearform der schwachen Formulierung?
- (d) Wann ist eine Bilinearform elliptisch, wann beschränkt?
- (e) Was ist ein Galerkin-Verfahren?
- (f) Wie schließt man auf die Lösbarkeit der diskreten Gleichungen?
- (g) Wie sehen die Einträge der Matrix und der rechten Seite der diskreten Gleichungen aus?
- (h) Worauf beruht die Fehlerabschätzung bei Galerkin-Verfahren?

Aufgabe 13.6: Finite Elemente

- (a) Wie wählt man die diskreten Räume V_n beim Verfahren der finiten Elemente?
- (b) Wie konstruieren Sie Basisfunktionen?
- (c) Welche Gestalt haben die Matrizen?
- (d) Worauf beruhen Fehlerabschätzungen?
- (e) Von welcher Ordnung konvergiert der „Energiefehler“ $\|\cdot\|_V$ bei Elementen, die stückweise Polynome vom Grad k sind? Was nehmen Sie dafür für die exakte Lösung u an?
- (f) Von welcher Ordnung konvergiert der L^2 -Fehler?